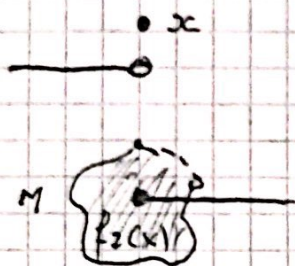


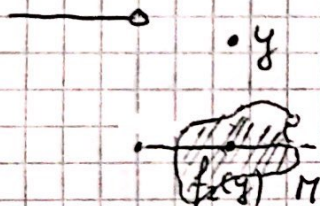
En  $\mathbb{T}, \mathbb{W}_S$ ;  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ;  $a \in \mathbb{T}$ . Recordemos el criterio o Argumento de continuidad y discontinuidad en un punto  $a$ :

|  |  |
|--|--|
| $f$ es continua en $a$<br>ssi<br>$\exists M \in \mathcal{V}_a : f(M) \text{ "se parte"}$ | $f$ es discontinua en $a$<br>ssi<br>$\forall M \in \mathcal{V}_a, f(M) \text{ "se parte"}$ |
|--|--|

Este argumento, un tanto poético, es poco consistente. Voluamos a la Transformación  $f_2$  y busquemos un argumento sólido. Empecemos: Primera Experiencia:



1.  $x$  es un punto naranja.  $M$  es una vecindad de  $f_2(x)$ . Buscar una vecindad  $N$  (rojo) de  $x$  tal que  $f_2(N) \subset M$ . Dibuje  $N$  y  $f_2(N)$  en café. ¿Qué observa?

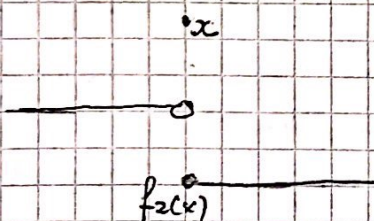


2.  $y$  es un punto amarillo.  $M$  es una vecindad de  $f_2(y)$ . Buscar una vecindad  $N$  (rojo) de  $y$  tal que  $f_2(N) \subset M$ . Dibuje  $N$  y  $f_2(N)$  en café. ¿Qué observa?

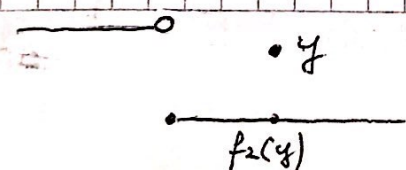
(No continúe hasta no tener la certeza de haber realizado a conciencia su tarea. y concluir.)

¿Qué observa? En el primer caso (1) No se encuentra  $N$ . En el segundo caso (2) sí encuentro  $N$  (Muchas posibilidades pero no cualquiera)

Nueva Experiencia



1. Proponer  $M$  vecindad de  $f_2(x)$  Tal que sí encuentre  $N$  (rojo) vecindad de  $x$  tal que  $f_2(N) \subset M$ . Dibuje  $f_2(N)$  en café.



2. Proponer  $M$  vecindad de  $f_2(y)$  Tal que No encuentre  $N$  vecindad de  $y$  cuya imagen esté incluida en  $M$ .



¿Qué observó en esta nueva experiencia? En el primer caso (1) encuentro  $M \in \mathcal{U}_{f(x)}$  tal que algún  $N \in \mathcal{U}_x$  tiene su imagen incluida en  $M$  pero en el segundo caso (2) No existe  $M$  ya que para cualquier  $M$  que dibuje siempre encontraré  $N$  tal que  $f_2(N) \not\subset M$ .

¿Qué nos enseña estas 2 experiencias? ¿Qué puedo concluir, en el contexto de estas 2 experiencias, que hace que  $x$  sea un punto naranja y  $y$  un punto amarillo?

Escriba un argumento, en palabras o en fórmula que expresa la diferencia entre  $x$  y  $y$

$f_2$  es continua en  $y$  porque:

$f_2$  es discontinua en  $x$  porque:

(No continúe hasta no tener la certeza de haber realizado la Tarea)  
Veamos como le fue. He aquí un argumento en fórmula a manera de definición

| DEFINICIÓN $\div f: \Pi \rightarrow \Pi \quad a \in \Pi$                         |  |
|--|--|
| $f$ es continua en $a$<br>ssi  | $f$ es discontinua en $a$<br>ssi   |
| $\forall M \in \mathcal{U}_{f(a)}, \exists N \in \mathcal{U}_a : f(N) \subset M$ | $\exists M \in \mathcal{U}_{f(a)} : \forall N \in \mathcal{U}_a, f(N) \not\subset M$ |

Guarde ésta definición en su memoria como si fuera un Poema. Descanse y Mañana, con este argumento (Definición) de continuidad, verifique (ya no será una adivinanza) la coloración de los puntos naranja y amarillo en las otras 4 Transformaciones:  $p$ ,  $f_1$ ,  $sc$  y  $f_3$  y cuando termine...

...continuamos: Recordemos una característica de la Topología usual de  $\Pi$ : "Toda vecindad de  $x$  contiene un Disco abierto centrado en  $x$  y Todo disco abierto centrado en  $x$  contiene una vecindad (No disco) de  $x$ "; y entonces la definición anterior de continuidad y discontinuidad de una transformación en un punto  $a$  la podemos particularizar así:



En  $\Pi$ ,  $\omega_s \equiv f: \Pi \rightarrow \Pi \equiv a \in \Pi$

$f$  es continua en  $a$   
ssi

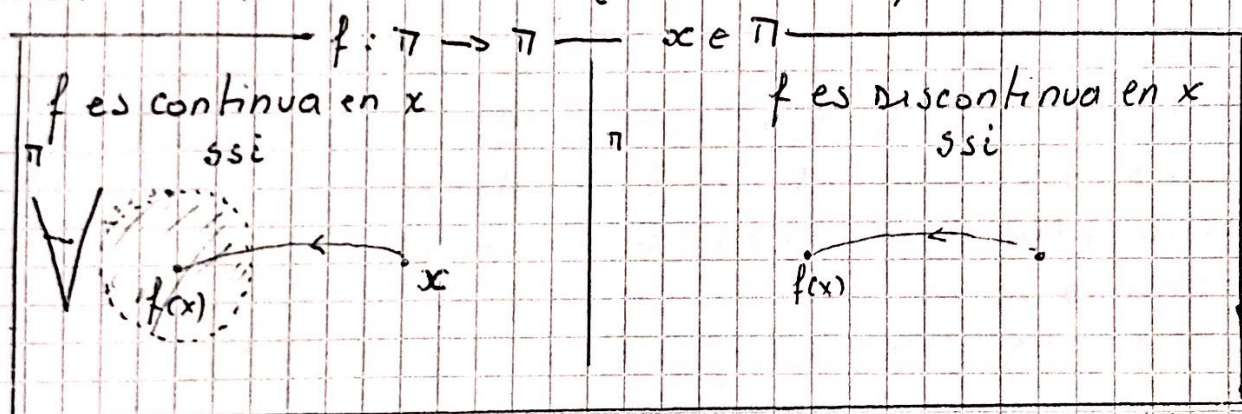
$$\forall \Delta(f(a), r) = M, \exists \Delta(a, r) = N : f(\Delta(a, r)) \subset M \text{ o } f(N) \subset M$$

$f$  es discontinua en  $a$   
ssi

$$\exists \Delta(f(a), r) = M : \forall \Delta(a, r) = N, f(N) \not\subset M \text{ o } f(N) \not\subset M$$

Y qué sencillo es hablar de discos abiertos como vecindades del punto  $x$  y del punto  $f(x)$ . Facilita mucho las ideas en  $\Pi$ ,  $\omega_s$ .

Esquematicemos estas 2 definiciones, es decir hagamos un "AFICHE FOTOGRÁFICO" (En la fotografía de  $\Pi$ )



Termínalo. Use Colores (Debo ver Discos, Imágenes y Cuantificadores)

Nota: Esta definición la encuentra en la pág 11 del Arlón 8 en versión continuidad y en los mismos términos,  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  NO es continua en  $x \in \Pi$  ssi NO para todo disco abierto  $B$  de centro  $f(x)$ , Existe un disco abierto  $A$  de centro  $x$  tal que  $f(A) \subset B$  es decir: f es DISCONTINUA en  $x$  ssi Existe algún disco abierto  $B$  de centro  $f(x)$  Tal que para cualquier disco  $A$  de centro en  $x$ ,  $f(A) \not\subset B$

Descanse y Mañana empezaremos por llevar esta versión de continuidad a un "AFICHE GRÁFICA" es decir a un afiche de Lazos, Manchas y Flechas.

complete el afiche, compártalo y corrígalo!



# AFICHE GRÁFICA (Gráfica Esquemática)

$D_x = \{ \text{Discos abiertos de centro } x \}$   $D_{f(x)} = \{ \text{Discos abiertos de centro } f(x) \}$

|                               |                                  |
|-------------------------------|----------------------------------|
| $f$ es continua en $x$<br>ssi | $f$ es discontinua en $x$<br>ssi |
|-------------------------------|----------------------------------|

Y ahora, estudiemos la continuidad (ó discontinuidad) de las Transformaciones, a la luz de esta versión de continuidad (versión de Discos abiertos)

Empecemos con  $S_c$ . Tomemos un punto  $a$ . (Lo que digamos para  $a$  será lo mismo que para cualquier otro punto;  $a$  "representa" cualquier otro punto;  $a$  es un punto "representativo")

$a$



Señalemos  $S_c(a)$ . Tomemos (Dibuje) un disco abierto  $X$  de centro  $S_c(a)$  y radio  $r$  (cualquiera). Busquemos si encontramos un disco abierto  $Y$  de centro en  $a$  que tenga su imágen incluida en  $X$ . ¿lo hay? ¡SI! ¿cualquiera? NO! Debe ser un disco  $Y$

con el radio  $s$  menor o igual que  $r$  es decir, si  $Y = \Delta(a, s)$  con  $s \leq r$  entonces  $S_c(Y) \subset X$ . Resumiendo:

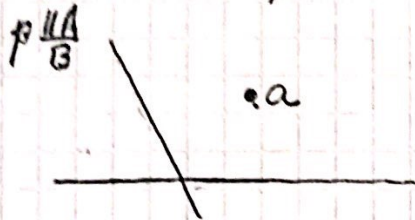
$S_c$  es continua en  $a$  es decir:  $\forall \Delta(S_c(a), r) = X, \exists \Delta(a, s) = Y : S_c(Y) \subset X$   
 sea  $X = \Delta(S_c(a), r)$  con  $r \in \mathbb{R}_0^+$  ( $X$  es cualquier disco; es decir:  $\forall X$ )  
 si  $Y = \Delta(a, s)$  (NO cualquiera; es decir  $\exists Y$ ) con  $s \leq r$   
 Entonces  $S_c(Y) \subset X$

Descanse y Terminamos la semana con el siguiente Taller

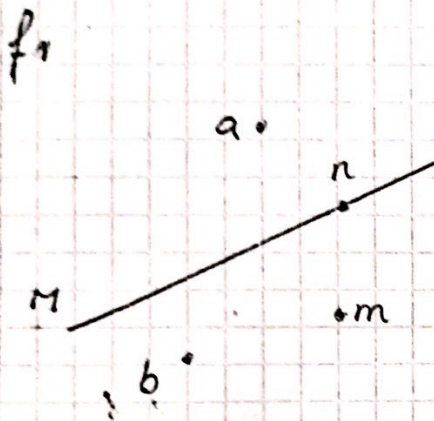
El resumen señalado en el recuadro anterior será el modelo para el desarrollo del Taller y consideraremos  $X = \Delta(f(a), r)$  , y,  $Y = \Delta(a, s)$ . Hasta mañana!



Estudiar las otras transformaciones:  $p \parallel_B$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  en los diferentes puntos representativos siguiendo el Modelo. (Antes de continuar, trate primero de ver cuales pueden ser los puntos representativos en cada una de las transfs)



(un solo punto representativo: a)  
 $p$  es \_\_\_\_\_ en  $a$  es decir:  $\forall X, \exists Y$ :  
 Sea  $X =$  \_\_\_\_\_  
 Si \_\_\_\_\_  
 Entonces \_\_\_\_\_



(Tres puntos representativos: a (o b) m, n)  
 $f_1$  es \_\_\_\_\_ en  $a$  es decir:  $\exists X: \forall$  \_\_\_\_\_

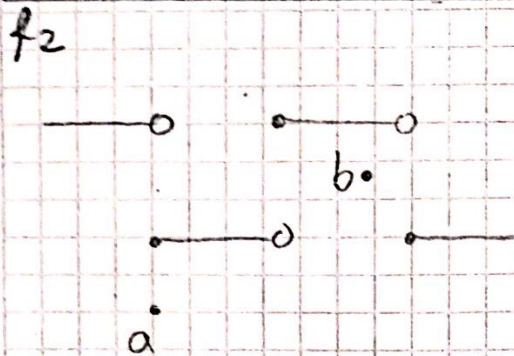
Sea  $X = \Delta$   
 Si  $Y =$  \_\_\_\_\_  
 Entonces \_\_\_\_\_

$f_1$  es \_\_\_\_\_ en  $m$  es decir:

Sea  $X =$  \_\_\_\_\_  
 Si  $Y = \Delta$   
 Entonces \_\_\_\_\_

$f_1$  es \_\_\_\_\_ en  $n$  es decir:

Sea  $X =$  \_\_\_\_\_  
 Si  $Y =$  \_\_\_\_\_  
 Entonces \_\_\_\_\_



(Dos puntos representativos: a, b)

$f_2$  es \_\_\_\_\_ en  $a$  es decir:  $\exists X$

Sea  $X =$  \_\_\_\_\_  
 Si  $Y =$  \_\_\_\_\_  
 Entonces \_\_\_\_\_

$f_2$  es \_\_\_\_\_ en  $b$  es decir:

Sea  $X =$  \_\_\_\_\_  
 Si  $Y =$  \_\_\_\_\_  
 Entonces \_\_\_\_\_

$f_3$  (Termine)

(cuatro puntos representativos m, a, b, c)